

K9 - Wärmetransport

Vorbereitung:

1. Inhaltlich: Molekularer Wärmetransport, Transportgleichungen, Wärmeleitfähigkeit κ und Temperaturleitfähigkeit α , Gaußsche Fehlerfunktion **erf** und komplementäre Fehlerfunktion **erfc**.
2. Methodisch: Wärmebildkamera, Auslesen von Dateien aus der Kamera, Extraktion zeitlicher und räumlicher Profile aus Thermogrammen. Stefan-Boltzmannsches Gesetz, Emissivität. Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit durch geeignete Anpassungsfunktionen. Hierzu erhalten Sie Hilfestellung durch den/die zuständige/n Assistenten/in.
3. Zum Versuchstermin hat jede Studierendengruppe ein Laptop mit installierter Software *Igor Pro* mitzubringen. Wenn niemand aus der Gruppe über ein Laptop verfügt, so kontaktieren Sie bitte rechtzeitig die Praktikumsleitung.

1 Theoretische Grundlagen

In einer ruhenden Flüssigkeit, innerhalb deren das Temperaturfeld einen Gradienten aufweist, wird Wärmeenergie von Orten höherer Temperatur zu Orten niedrigerer Temperatur transportiert. Dieser Transport erfolgt durch molekulare Stöße und wird durch die entsprechenden Transportgleichungen charakterisiert.

Es gelten für eindimensionale Systeme die folgenden Gesetzmäßigkeiten mit den üblichen Bezeichnungen:

Wärmefluss durch eine Fläche A über einen Temperaturgradienten:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dQ}{dt} = -\kappa \cdot \frac{dT}{dx}. \quad (1)$$

K9 Wärmetransport

Raumzeitliches Temperaturprofil:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \quad (2)$$

κ ist der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient, α ist die Temperaturleitfähigkeit. Zwischen den Koeffizienten α und κ besteht der Zusammenhang:

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c} \quad (3)$$

mit der Dichte ρ und der spezifischen (massebezogenen) Wärmekapazität c .

Gleichung 2 ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösungen das vollständige raumzeitliche Profil der Wärmeausbreitung mathematisch abbilden. Die Lösungen können außerordentlich kompliziert sein und sind häufig nur durch numerische Verfahren zugänglich.

Es gibt aber einige Systeme, für die geschlossene Lösungen vorliegen. Ein solches System wird im vorliegenden Praktikumsversuch genutzt. Es ist im experimentellen Teil beschrieben. Die Randbedingungen von Gl. 2 lauten unter Beachtung der Radialsymmetrie des Systems (T_H : Temperatur des Heizzylinders, T_0 : Badtemperatur zu Beginn, vgl. Abb. 4):

$t = 0 :$

$$T = T_H \quad \text{für } r \leq r_0$$

$$T = T_0 \quad \text{für } r > r_0$$

$t > 0 :$

$$T = T_H \quad \text{für } r \leq r_0$$

$$T > T_0 \quad r > r_0$$

Grenzwert :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T = T_H \quad \text{für alle } r$$

Für dieses System lautet die Lösung von Gl. 2 im Bereich $r > r_0$:

$$\boxed{T(r, t) = T_H \cdot (1 - \operatorname{erf}(y)) + T_0.} \quad (4)$$

mit

$$y = \frac{r}{2 \cdot \sqrt{\alpha t}},$$

wobei wir wegen der Radialsymmetrie die Ortsvariable r statt x verwenden.

Die Gaußsche Fehlerfunktion „erf“ ist das Integral der Gaußschen Normalverteilungsfunktion („Gauß-Glocke“).

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-y^2) \cdot dy.$$

Die Fehlerfunktion ist in vielen Mathematik-Programmen vordefiniert und kann ebenso aufgerufen werden wie \sin oder \exp .

Die komplementäre Fehlerfunktion erfc ist definiert gemäß

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y)$$

Unter Nutzung von erfc nimmt die Gl. 4 folgende Form an:

$$T(r, t) = T_H \cdot \operatorname{erfc}(y) + T_0. \quad (5)$$

Diese äußerst einfach erscheinende Gleichung kann zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit nur genutzt werden, wenn man ein Computerprogramm zur Verfügung hat, das erfc berechnen kann. Für die softwaregestützte Datenanalyse ist erfc besser geeignet als erf , weil der Algorithmus für Werte von erf nahe Eins bessere Ergebnisse für $1 - \operatorname{erf}$ liefert.

Typische Kurven für die zeitliche Entwicklung des radialen Temperaturprofils können der Abbildung 1 entnommen werden. Komplementär hierzu zeigt die Abb. 2 für dieselbe Situation den zeitlichen Verlauf der Temperatur für ausgewählte Abstände von der Wärmequelle.

Gl. 4 bzw. 5 können als Anpassungsfunktion in einer Datenanalyse-Software genutzt werden, um die Temperaturleitfähigkeit α zu bestimmen.

Da das gesamte System radialsymmetrisch aufgebaut ist, findet man bei sorgfältiger Durchführung ein radialsymmetrisches Temperaturprofil, das sich mit der Zeit durch Wärmetransport aus dem Heizzylinder in die Badflüssigkeit ändert. Durch orts aufgelöste Aufnahme des Temperaturprofils mit Hilfe einer Wärmebildkamera in äquidistanten Zeitschritten Δt gelangt man zu einem vollständigen raumzeitlichen Profil des Wärmeflusses.

Ein von der Kamera aufgenommenes Wärmeprofil ist in einer Falschfarbendarstellung

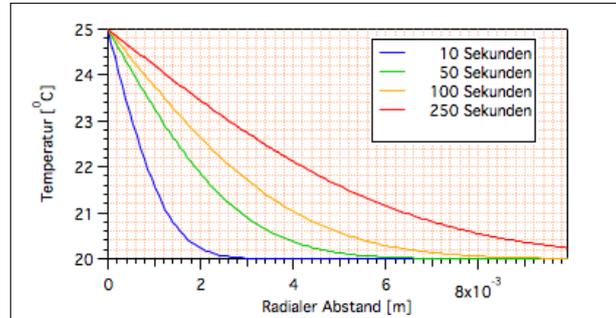


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf des radialen Temperaturprofils im experimentellen Aufbau entsprechend Abb. 4 für $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $T_H = 25^\circ\text{C}$ und $\alpha = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$. Die hier verwendete Koordinate r bezieht sich auf den Abstand vom Rand des Heizzylinders. Alle gezeigten Kurven folgen der Gl. 4. Es fließt beständig Wärme in die Badflüssigkeit, so dass sich dort die Temperatur erhöht, aber die Temperatur des Heizzylinders bleibt konstant.

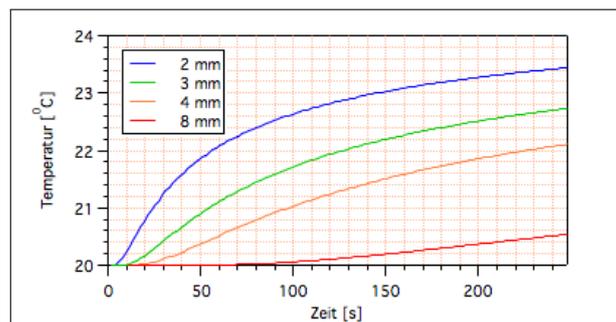


Abbildung 2: Zeitliche Entwicklung der Temperatur ausgesuchter Abstände vom Heizzylinder mit denselben Parametern wie in der Abb. 1. Alle gezeigten Kurven folgen der Gl. 4.

in der Abb. 3 gezeigt.

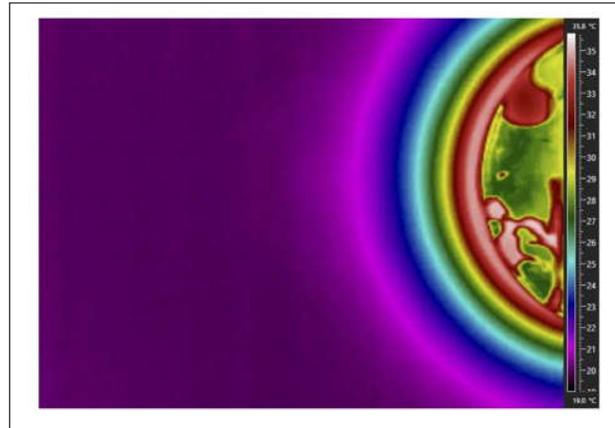


Abbildung 3: Falschfarbendarstellung des Temperaturprofils in der Nähe des Heizzylinders. Der Temperaturverlauf in der Flüssigkeit wird als Farbprofil dargestellt.

2 Versuchsdurchführung:

Das radialsymmetrische System ist in der Abbildung 4 gezeigt. Details zum experimentellen Aufbau sind in der Abb. 5 gezeigt.

Im Zentrum einer flüssigkeitsgefüllten Wanne ist ein Heizzylinder gestellt, der mit einem Thermostaten verbunden ist. Heizzylinder und Thermostat sind zunächst durch einen Hahn getrennt. Das ganze System ist im thermischen Gleichgewicht, d.h. Zylinder und Wannenflüssigkeit weisen die gleiche Temperatur T_0 auf.

Durch Öffnen des Hahnes (Zeitpunkt $t = 0$) wird der Zylinder schlagartig um eine Temperatur ΔT auf $T_0 + \Delta T = T_H$ erwärmt. Der Zylinder bleibt konstant auf dieser Temperatur. Nun wird Wärme aus dem Zylinder in die Wannenflüssigkeit transportiert. Es stellt sich ein zeit- und ortsabhängiges Temperaturprofil in der Flüssigkeit ein.

Der Versuchsaufbau besteht aus den folgenden Komponenten:

1. Eine Wärmebildkamera zur Aufnahme von Thermogrammen (FLIR T425);
2. eine flüssigkeitsgefüllte Wanne; als Flüssigkeit wird verwendet: (a) Wasser, dessen Viskosität mit Hilfe von Methylcellulose erhöht worden ist, um makroskopische Flüssigkeitsbewegungen zu unterdrücken; oder (b) Glycerin;
3. ein zentrisch in der Wanne angebrachter Heizzylinder;

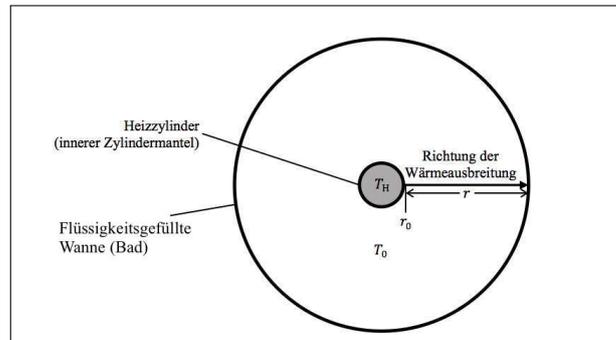


Abbildung 4: Prinzipskizze des Versuchsaufbaus zum Wärmetransport. T_H ist die zeitliche konstante Temperatur des Heizzyinders, T_0 ist die Anfangstemperatur des Bades, r ist der Abstand vom *Rand* des Heizzyinders. Für unsere Zwecke ist es günstig, $r_0 = 0$ zu setzen, auch wenn dies für Polarkoordinaten unüblich ist.

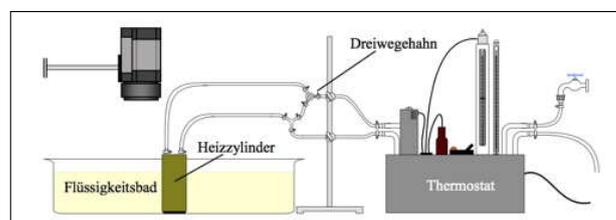


Abbildung 5: Experimenteller Aufbau zur Messung des molekularen Wärmetransports.

K9 Wärmetransport

4. ein Thermostat, dessen Heizflüssigkeit durch den Heizzylinder gespült wird;
5. ein Messrechner zur Datenerfassung. Auf dem Rechner befindet sich das Programm „FLIR Quickplot“.

Der Versuch wird wie folgt ausgeführt:

1. **Wichtig!** Bei der gesamten Versuchsdurchführung ist darauf zu achten, dass die Flüssigkeit in der Wanne nicht bewegt wird - kein Rütteln, kein Schütteln, kein Husten. Alle Messungen sind entwertet, wenn sich die Flüssigkeit bewegt. Um die Bewegung der Flüssigkeit einzuschränken, wird im Falle von Wasser als Badflüssigkeit Methylcellulose zum Verdicken verwendet.
2. Die Temperatur in der Wanne wird gemessen (vorinstalliertes Thermometer). Es wird mit der Wärmebildkamera ein Thermogramm des Systems aufgenommen, das der Situation *vor* der Wärmeübertragung entspricht.
3. Der Thermostat wird bei geschlossenem Hahn auf eine Temperatur eingestellt, die um einige Grad Celsius höher ist als die Temperatur der Flüssigkeit in der Wanne. Größere Temperaturunterschiede führen zu Dichtegradienten in der Badflüssigkeit, was Verwirbelungen verursacht.
4. Der Hahn zum Thermostaten wird geöffnet. Ab diesem Zeitpunkt wird für 5 Minuten mit einem Zeitintervall von $\Delta t = 1$ s ein Thermogramm aufgenommen. Die Falschfarbendarstellung Ihrer Thermogramme sollten ungefähr so aussehen, wie in der Abbildung 3 gezeigt.
5. Die Thermogramme werden als Textdateien aus der Kamera auf Ihren Computer transferiert (Hilfestellung durch Laborassistenten/in).

3 Datenauswertung

1. Stellen Sie für 10 Zeiten das radiale Temperaturprofil graphisch dar. Wählen Sie geeignete Marker zur Darstellung der jeweiligen Temperatur. Nutzen Sie die im Anhang gegebenen Anpassungsfunktionen, um die Temperaturleitfähigkeit α der Flüssigkeit zu ermitteln. Nehmen Sie die Anpassungsfunktionen in Ihre Abbildung mit auf. Berechnen Sie den gewichteten Mittelwert von α . Bestimmen Sie daraus den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten κ der Flüssigkeit und vergleichen Sie mit Literaturwerten.
2. Verfahren wie unter 1, stellen Sie aber für 10 verschiedene Abstände die zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils dar und ermitteln Sie hieraus zunächst den gewichteten Mittelwert von α und hieraus κ nach Gl. 3.

3. Nennen Sie mindestens *zwei* systematische Fehlerquellen, die mit dem Experiment zusammenhängen.
4. Informieren Sie sich über Eigenschaften von α bzw. κ . Ist die Größe während der Messungen überhaupt eine Konstante?

4 Anhang - Anpassungsfunktionen für Igor Pro

Die uns hauptsächlich interessierende Größe ist die Temperaturleitfähigkeit α , die in den folgenden Anpassungsfunktionen als Parameter `w[0]` auftritt. Wir benötigen *zwei* Funktionen, weil Gl. 5 eine Funktion zweier Variabler ist. Bei jeder der Anpassungsfunktionen geht *eine* Variable aus Gl. 5 als Parameter, die andere als unabhängige Variable ein.

1. Anpassungsfunktion für *ortsabhängige* Temperaturprofile für eine feste Zeit.

```
1 function radialHeatTransferFitFunc(w,x): FitFunc // dies ist ein Kommentar
2   wave w // enthält die Fitparameter w[0]..w[4]
3   variable x // radialer Abstand vom Rand des Heizzylinders
4   variable alpha = w[0] // Temperaturleitfaehigkeit
5   variable zeit = w[1] // Verstrichene Zeit
6   variable r_offset = w[2] // Abstandskorrektur
7   variable T_0 = w[3] // Badtemperatur zu Beginn
8   variable T_H = w[4] // Temperatur Heizzylinder
9   variable y = (x-r_offset)/(2*sqrt(alpha * zeit)) // Argument von erfc
10  return T_H * erfc(y) + T_0 // die Auswertegleichung
11 end
```

K9 Wärmetransport

2. Anpassungsfunktion für *zeitabhängige* Temperaturprofile bei einem festen Ortspunkt.

```
1 function temporalHeatTransferFitFunc(w,x): FitFunc // dies ist ein Kommentar
2     wave w // enthält die Fitparameter
3     variable x; // hier ist x die Zeit
4     variable alpha = w[0];
5     variable zeit_offset = w[1]; // Nullpunkt der Zeitmessung
6     variable radialValue = w[2]; // Abstand vom Zylinderrand
7     variable T_0 = w[3] // Korrekturglied fuer Temperatur
8     variable T_H = w[4]; // delta_T am Anfang der Messung
9     variable y = radialValue/(2*sqrt(alpha * (x - zeit_offset))) //Argument von erfc
10     return T_H * erfc(y) + T_0; // die Auswertgleichung
11 end
```

R. Flesch / V. Mondes