FiP - Fehlerbetrachtung im Praktikum

Allgemeines:

Jedes Meßergebnis ist mit einem mehr oder weniger großen Fehler behaftet. Wäre das Ergebnis absolut exakt, so müßten genau genommen unendlich viele Stellen angegeben werden. Wir unterscheiden grundsätzlich zwischen systematischen und zufälligen Fehlern.
Hauptursache systematischer Fehler ist z.B. falsche Eichung oder fehlerhaftes Funktionieren von Meßgeräten. Es würde über den Rahmen des Praktikums hinausgehen, solche Fehler in Betracht zu ziehen.
Die Ursachen zufälliger Fehler können in der Person des Experimentators (Reaktionsvermögen beim Zeitstoppen, Ablesefehler, Ungeschicklichkeit beim Einstellen eines bestimmten Wertes an einem Gerät) oder sonstigen zufälligen Einflüssen (unregelmäßige Änderung der Windrichtung bei Bestimmung der Höchstgeschwindigkeit eines Fahrzeuges, Temperatur- und Druckschwankungen) begründet sein.
Im allgemeinen bezeichnet man mit dem Symbol Δ den absoluten und mit δ den relativen Fehler einer Meßgröße, wobei letzterer meist in % angegeben wird.

Beispiel:
$E = (21.7 \pm 0.4)$ kJ $\qquad \Delta E = 0.4\,\mathrm{kJ}$

$$\frac{\Delta E}{E} \equiv \delta E = 0.018 = 1.8\%.$$

Selbstverständlich sollten im Ergebnis nicht mehr Stellen angegeben werden als durch die Größe des Fehlers abgesichert ist.

Mittelwert, Fehler des Mittelwertes:

Beim wiederholten Messen einer Größe X unter gleichen Bedingungen werden die einzelnen Meßwerte x_i infolge zufälliger Fehler um den wahren Wert x_W streuen. Wenn systematische Fehler ausgeschlossen sind und wenn die Meßwerte mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit um gleiche Beträge zu groß oder zu klein sein können, dann würde das arithmetische Mittel (der "Mittelwert")

(FiP-1): $$\bar{x} \equiv \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

im Grenzfall unendlich vieler Messungen ($n \to \infty$) mit dem wahren Wert x_W zusammenfallen. Bei einer begrenzten Zahl n der Messungen ist dagegen voraussichtlich $\bar{x} \neq x_W$, aber $\bar{x}$ ist trotzdem der (aufgrund der vorhandenen Information) "wahrscheinlichste" Wert, d.h., die Wahrscheinlichkeit, in einer näheren Umgebung des unbekannten wahren Wertes x_W zu liegen , ist für $\bar{x}$ größer als für alle anderen Werte von x.
Aus der Definition (FiP-1) ergibt sich unmittelbar, daß die Summe der (teils positiven, teils negativen) Abweichungen der Meßwerte vom Mittelwert gleich null ist:

(FiP-2): $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0\,.$$

Der Mittelwert erfüllt zugleich die Forderung, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der festen Meßwerte x_i von einem variablen Wert x für $x = \bar{x}$ ein Minimum erreicht ("*Gauß*'sche Methode der kleinsten Fehlerquadrate"):

(FiP-3): $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 = \text{Minimum für } x = \bar{x}$$

(Beweis wie üblich, indem man die erste Ableitung gleich null setzt).
Der wahre Fehler $\Delta x_i \equiv x_i - x_W$ eines Einzelwertes x_W ist unbekannt. Als Maß für die Genauigkeit von jedem der (mit gleicher Sorgfalt gemessenen) Einzelwerte dient statt dessen die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat, die als "mittlerer quadratischer Fehler der Einzelwerte" (auch "Streuung") bezeichnet wird:

(FiP-4): $$\overline{\Delta x_q} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_W)^2} \; .$$

Diese Formel läßt sich zwar noch nicht unmittelbar auswerten, da x_W unbekannt ist. Für große Zahlen n kann man zwar zeigen[1], daß bei zufälliger Streuung näherungsweise gilt:

(FiP-5): $$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_W)^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \; .$$

Damit ergibt sich zur Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers der Einzelwerte aus dem nach Gleichung (FiP-1) berechneten Mittelwert $\bar{x}$ und den gemessenen x_i:

(FiP-6): $$\overline{\Delta x_q} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \; .$$

Die Anwendung dieser (und der folgenden) Formel ist allerdings nicht mehr sinnvoll, wenn etwa $n < 4$.
Anschaulich ist $\overline{\Delta x_q}$ ein Maß für die Streubreite der Fehlerkurve: Im Normalfall ist die Häufigkeit der verschieden großen Meßfehler nämlich durch die *Gauß*'sche Glockenkurve $y = e^{-x^2}$ gegeben, wenn $x \equiv \frac{\Delta x_i}{a}$ der durch eine passende Bezugseinheit dividierte Fehler und y dessen relative (d.h. auf den Wert y = 1 für x = 0 normierte) Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit ist.
Für das mittlere Fehlerquadrat erhält man nach dem Ansatz

(FiP-7): $$\overline{x^2} = \frac{\int_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx}{\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}$$

[1] H. Hänsel: "Grundzüge der Fehlerrechnung", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1966), S. 23f

den Zahlenwert $\overline{x^2} = \frac{1}{2}$, also ist

(FiP-8):
$$\frac{\overline{\Delta x_q}}{a} = \sqrt{\overline{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\,,$$

somit ist $a = \sqrt{2} \cdot \overline{\Delta x_q}$.

An den Stellen x = ±0,707 besitzt die *Gauß*'sche Kurve ihre beiden Wendepunkte (y" = 0). Die Ordinatenwerte betragen hier 60.65% des Maximalwertes, $\overline{\Delta x_q}$ ist also etwas kleiner als die halbe Mittelwertsbreite. (Die Halbwertsbreite ist der Abstand der beiden Punkte, deren Ordinaten 50% des Maximalwertes betragen.)

Die Kurvenfläche zwischen den beiden Wendepunkten umfaßt 68% der Meßwerte im Streubereich $x_W \pm \overline{\Delta x_q}$ liegen. Im Bereich $x_W \pm 2 \cdot \overline{\Delta x_q}$ liegen entsprechend bereits 95% aller Meßwerte der betreffenden Meßgenauigkeit.

Ist die Zahl der Meßwerte groß genug, so ändert sich der nach Gleichung (FiP-6) berechnete Fehler $\overline{\Delta x_q}$ bei weiterer Erhöhung von n praktisch nicht mehr, wie man es von dem Genauigkeitsmaß der Einzelmessung auch verlangen muß.

Im Gegensatz dazu wird die Genauigkeit des Mittelwertes $\bar{x}$ bei wachsender Zahl n der zu Grunde gelegten Messungen immer besser. Berechnet man nämlich zunächst die Summe der x_i, so ist der mittlere quadratische Fehler dieser Summe nicht einfach gleich $n \cdot \overline{\Delta x_q}$, sondern infolge teilweiser Fehlerkompensation nur gleich $\sqrt{n} \cdot \overline{\Delta x_q}$ Dividiert man anschließend (zur Berechnung des Mittelwertes) die Summe der x_i durch n, so folgt entsprechend für den <u>mittleren quadratischen Fehler des Mittelwertes</u>:

(FiP-9):
$$\Delta x = \frac{\sqrt{n} \cdot \overline{\Delta x_q}}{n} = \frac{\overline{\Delta x_q}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Δx wird also mit wachsendem n immer kleiner.

<u>Beispiel:</u>
Die wiederholte Titration einer Iodlösung mit Thiosulfat ergibt folgende Verbrauchstabelle:

V_i / ml	15.5	8.9	13.2	16.0	9.3	12.7
$(V_i - \bar{V})^2$ / ml^2	8.4	13.7	0.4	11.6	10.9	0.0

$$\bar{V} = 12.6\text{ml}$$
$$\sum_{i=1}^{6} (V_i - \bar{V})^2 = 45.0\text{ml}^2$$

Damit wird der mittlere quadratische Fehler der Einzelwerte

(FiP-10):
$$\overline{\Delta V_q} = \left(\frac{45}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ml} = 3.0\text{ml}\,.$$

Für uns wichtig ist der Fehler des <u>Mittelwertes</u> $\bar{V}$. Nach Gleichung (FiP-9) ergibt sich

(FiP-11): $$\Delta V = \frac{3.0\text{ml}}{\sqrt{6}} \cong 1.2\text{ml}.$$

Der mittlere Verbrauch an Thiosulfat ist also $\overline{V} = (12.6 \pm 1.2)\text{ml}$. Der relative Fehler ist dann $\delta V = \frac{1.2}{12.6} = 0.095 = 9.5\%$. Die Zuverlässigkeit des so berechneten Fehlers wird größer, je mehr Einzelwerte ermittelt werden. (Außerdem wird der Fehler selbst kleiner.)

Zusammengesetzte Ergebnisse (Fehlerfortpflanzung):

Bei den meisten Meßergebnissen handelt es sich um die Ermittlung von Größen, die aus einer oder mehreren Einzelgrößen zusammengesetzt sind, die ihrerseits jeweils mit einem Fehler behaftet sein können. Die Frage ist, inwieweit die Fehler der Einzelgrößen das zusammengesetzte Ergebnis infizieren.

Beispiel:
Es soll der Druck eines (idealen) Gases in einem abgeschlossenen Rezipienten berechnet werden. Bestimmt wurden die Temperatur $T \pm \Delta T$, das Volumen $V \pm \Delta V$ und die Gasmenge $n \pm \Delta n$. Bekanntlich gilt:

(FiP-12): $$p = \frac{nRT}{V}.$$

Wie groß ist der Fehler von p?
Das dabei anzuwendende Verfahren läßt sich am einfachen Fall, bei dem das Ergebnis F nur von einer Größe abhängt (z.B. $F(x) = x^2$), illustrieren:

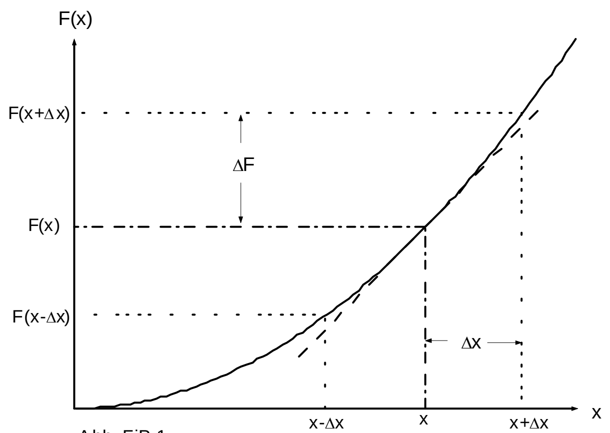

Abb. FiP-1

Der Wert x sei auf $\pm\Delta x$ genau gemessen. Wie groß ist der Fehler von F, wenn $F(x) = x^2$?
Nach dem *Taylor*schen Satz gilt:

(FiP-13): $$F(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n F(x)}{dx^n} \cdot \frac{(\Delta x^n)}{n!} = F(x) + \frac{dF}{dx}\Delta x + \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} + \cdots.$$

Bricht man die Reihenentwicklung nach dem linearen Glied ab (d.h., ersetzt man die Kurve durch die Tangente), dann gilt näherungsweise:

(FiP-14): $$F(x+\Delta x) = F(x) + \frac{dF}{dx}\Delta x$$

(FiP-15): $$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F\,,$$

(FiP-16): $$\Delta F = \frac{dF}{dx}\Delta x\,,$$

wobei $\frac{dF}{dx}$ die Steigung der Tangente im Punkt x ist. Diese Näherung hat natürlich nur Sinn, wenn $\Delta x \ll x$.
Für unser Beispiel $F(x) = x^2$ ergibt sich mit den Gleichungen (FiP-16)

(FiP-17): $$\Delta F = 2x\Delta x$$

und

(FiP-18): $$\delta F \equiv \frac{\Delta F}{F} = 2\delta x\,.$$

<u>Zahlenbeispiel:</u>
$x = 10 \pm 1$, $\Delta x = 1$, $\delta x = 0.1 = 10\%$,
nach (FiP-16) erhält man $\Delta F = 20$, also $\delta F = 20\%$.
Das exakte Ergebnis ist $F = 100^{+21}_{-19}$, also $\Delta F = 100^{+21}_{-19}$.
Ist ein Ergebnis aus mehreren Größen zusammengesetzt, z.B. F = F(x,y,z), ergibt sich in Analogie zu Gleichung (FiP-16)

(FiP-19): $$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right|\,.$$

Hier wird der <u>ungünstigste</u> Fall angenommen, daß sämtliche Fehler <u>gleichsinnig</u> wirken (Betragszeichen). Stellt man eine gewisse Wahrscheinlichkeit der gegenseitigen Fehlerkompensation in Rechnung, so erhält man

(FiP-20): $$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right)^2}\,.$$

Im Rahmen des Praktikums ist es meist sinnvoll, sich auf den Ausdruck (FiP-20) zu beschränken.

<u>Beispiele:</u>
a) $F = xy$, $\Delta F = y\Delta x + x\Delta y \Rightarrow \delta F = \delta x + \delta y$

b) $F = \frac{xy}{z}$, $\Delta F = \frac{y}{z}\Delta x + \frac{x}{z}\Delta y + \frac{xy}{z^2}\Delta z \Rightarrow \delta F = \delta x + \delta y + \delta z$

c) Analog berechnet man aus $F = \frac{x^a \cdot y^b}{z^c} \Rightarrow \delta F = a\delta x + b\delta y + c\delta z$.
a, b, c sind Konstanten.

d) ideale Gasgleichung $p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow \delta p = \delta n + \delta T + \delta V$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{e)} & F = x + y \\ \text{f)} & F = x - y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta F = \Delta x + \Delta y \quad \text{bzw. nach Gleichung (FiP-20):} \quad (\Delta F)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 .$$

Damit lassen sich folgende einfache Rechenregeln aufstellen:

i) Bei multiplikativen Verknüpfungen addieren sich die Relativfehler der Einzelgrößen.
ii) Bei Potenzprodukten wird der Relativfehler mit dem Exponenten multipliziert.
iii) Bei additiven Verknüpfungen addieren sich die Absolutfehler bzw. nach Gleichung (FiP-20) deren Quadrate. (vgl. die Herleitung von (FiP-9) aus (FiP-6))

Ein Spezialfall, der häufig vorkommt, ist

g) $F = \ln x$, $\Delta F = \frac{\Delta x}{x} = \delta x$

Zahlenbeispiel:
$x = 10.0 \pm 2.0$
Nach (g) ist $\Delta F = \delta x = 0.20$.
Das exakte Ergebnis ist $F = \ln[10.0 \pm 2.0] = 2.30^{+0.18}_{-0.22}$.
In vielen Fällen (bei funktionalen Verknüpfungen) muß der Ausdruck (FiP-20) explizit berechnet werden:

h) $F = x^2 \cdot \sin y$, $\Delta F = 2x \sin y \cdot \Delta x + x^2 \cos y \cdot \Delta y$

$$\Rightarrow \delta F = 2\delta x + \frac{\Delta y}{\tan x} .$$

<u>Graphische Abschätzung des Fehlers einer Geradensteigung</u>

Oft ist eine gemessene Größe F eine lineare Funktion

(FiP-21): $$F = mx + c$$

von einer einzigen willkürlichen Größe x. Dabei ist $\frac{dF}{dx} = m$ die Steigung der Geraden, die sich bei der graphischen Darstellung von F über x ergibt. Obwohl heutzutage schon Taschenrechner mit geeigneten Approximationsverfahren mit Angabe der Geradensteigung samt Fehler ausgestattet sind, ist es oft sinnvoll und anschaulich, die Geradensteigung und deren Fehler mit einem graphischen Verfahren abzuschätzen. Hat man viele Meßpunkte (siehe Abb. FiP-2), so legt man nach Augenmaß eine mittlere Gerade durch diese und parallel dazu zwei den sogenannten "Fehlerschlauch" begrenzende Geraden. Im Fehlerschlauch sollten mehr als $\frac{2}{3}$ der Meßpunkte liegen. Der maximale (m_{max}) bzw. minimale Steigung (m_{min}) werden dann durch die beiden Grenzgeraden gegeben. Sie sind die Diagonalen des durch den ersten und letzen Meßpunkt begrenzten Fehlerschlauchs.

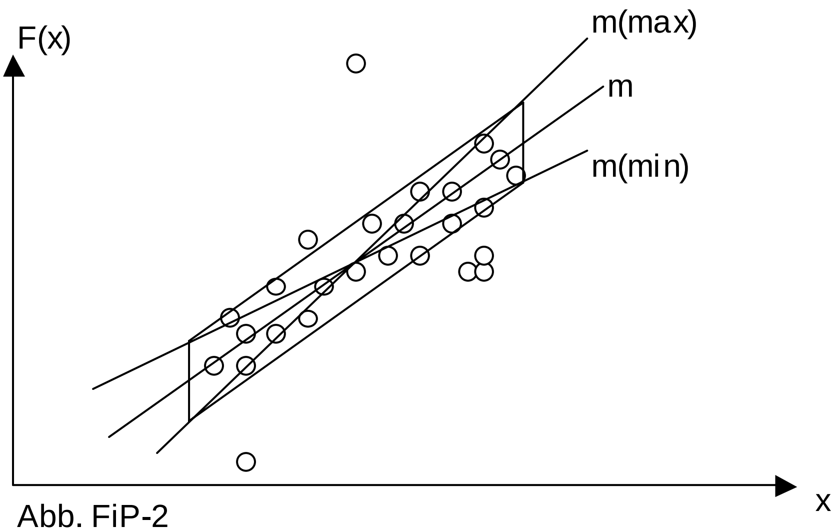

Abb. FiP-2

Hat man wenig Meßpunkte (siehe Abb. FiP-3), ist es sinnvoll, sich den Fehler jeder Einzelmessung auszurechnen oder abzuschätzen, die Meßpunkte mit einem Fehlerbalken bzw. Kreuz zu versehen und dann die Steigung abzuschätzen.

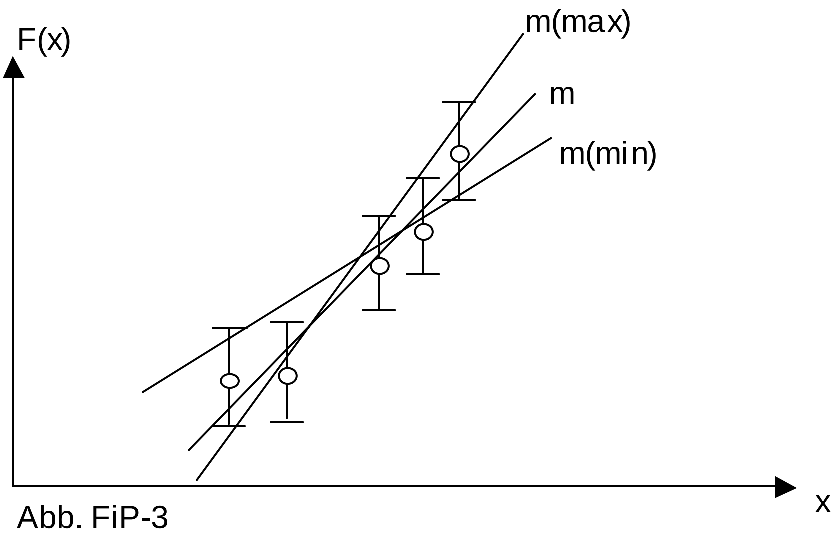

Abb. FiP-3

Mit den Symbolen in Abb. FiP-4 läßt sich eine einfache Formel für den Steigungsfehler erhalten:

(FiP-22): $$m = \frac{a}{b},\ m_{max} = \frac{a + 2\Delta a}{b},\ m_{min} = \frac{a - 2\Delta a}{b},\ \Delta m = \frac{1}{2}\left(m_{max} - m_{min}\right)$$

(FiP-23): $$\Rightarrow \Delta m = \frac{2\Delta a}{b}$$

und schließlich:

(FiP-24): $$\delta m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{2\Delta a}{a}.$$

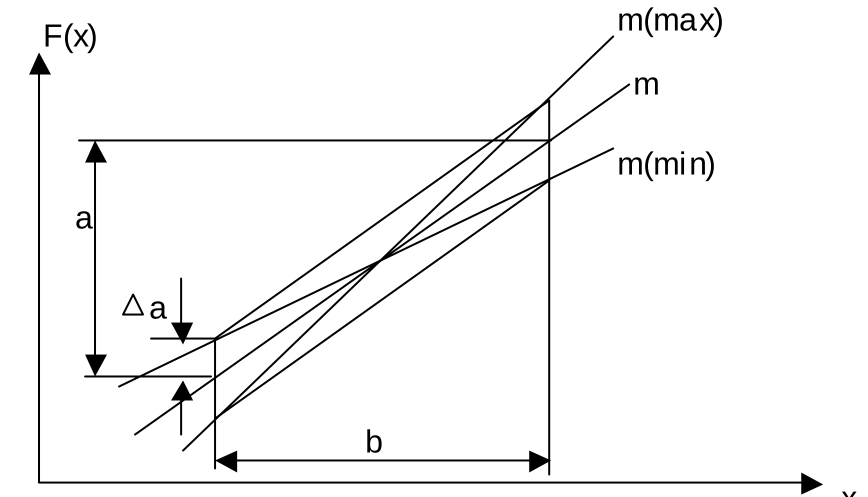

Abb. FiP-4

In Gleichung (FiP-24) können Δa und a z.B. in cm angegeben werden (da δm nicht von den Einheiten von a abhängt). Grob gesprochen ist a der vertikale Meßpunktbereich und $2\Delta a$ die vertikale Dicke des Fehlerschlauchs. Soll der Fehler aus nur zwei Meßpunkten bestimmt werden, muß aus den beiden Fehlerbalken der Länge $2\Delta a_1$ und $2\Delta a_2$ ein eventuell unsymmetrischer Fehlerschlauch konstruiert werden. Analog zu Gleichung (FiP-24) erhält man:

(FiP-25): $$\delta m = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{a}.$$

Diese Beziehung sei an folgendem Beispiel illustriert:

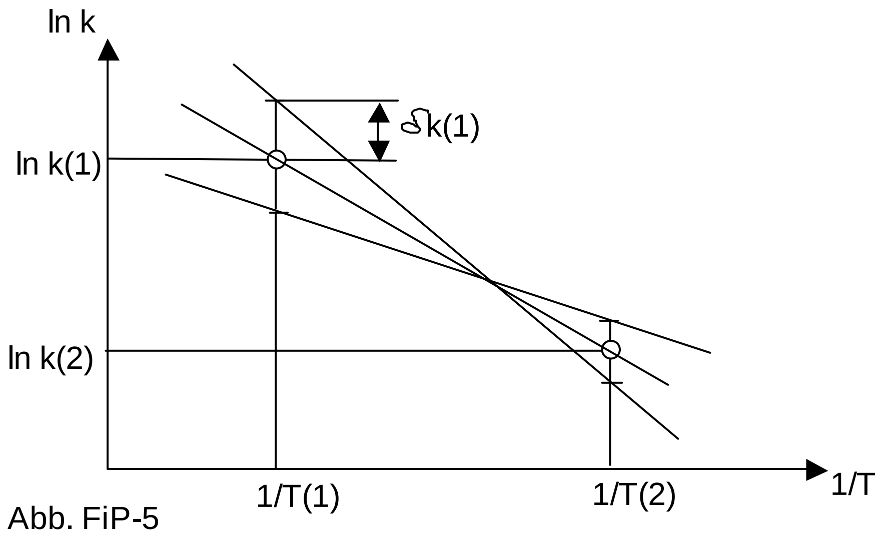

Abb. FiP-5

Die Steigung einer Auftragung ln[k] über $\frac{1}{T}$, (FiP-26):

$$m = \frac{\ln k_1 - \ln k_2}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}},$$

soll aus zwei Punkten 1 und 2 bestimmt werden (siehe Abb. FiP-5). Man verschafft sich die relativen Fehler δk_1 und δk_2. Dann ist $a = \left|\ln k_1 - \ln k_2\right|$ und (siehe auch Beispiel (g)) $\Delta a_1 = \Delta(\ln k_1) = \delta k_1$ bzw. $\Delta a_2 = \delta k_2$ und folglich

(FiP-27):

$$\delta m = \frac{\delta k_1 + \delta k_2}{\ln k_1 - \ln k_2}.$$

Schlußbemerkung

Die Fehlerberechnung ist kein Dogma. Manchmal ist es sinnvoll, eine plausible Fehlerabschätzung zu machen und diese mit einigen Sätzen zu erläutern. Auf jeden Fall verschaffe man sich vor Beginn einer jeden Fehlerbetrachtung ein Bild von der ungefähren Größe bzw. Größenordnung der Fehler der Einzelgrößen, aus denen sich der Fehler des Endergebnisses zusammensetzt. Beim Versuch T 7 - Verbrennungswärme ist es möglich, die Masse der zu verbrennenden Substanz z.B. auf 1.12345±0.00002g genau zu bestimmen. Es hat dann wenig Sinn, mit dem geringen Relativfehler von etwa $2 \cdot 10^{-5}$ in eine formale Fehlerrechnung einzugehen, wenn andererseits (unter anderem aufgrund offensichtlicher systematischer Fehler) der Fehler bei der Bestimmung der Temperaturerhöhung um Größenordnungen höher ist.